

## 第2章 ロジット型モデルと費用便益分析

### 1 はじめに

交通需要予測と交通投資の評価においてロジットモデルが用いられることが多くなってきている。ロジットモデルは個人の効用最大化モデルから導出でき、理論的に整合的な便益評価を非常に簡単な計算で行うことができるという長所をもっている。しかしながら、強い単純化の仮定が置かれているので、実際の適用には注意が必要である。

本稿では、実務上の課題を念頭に置きながら、ロジットモデルとその拡張であるネスティッドロジットモデルを用いる費用便益分析手法を検討する。ロジットモデルやネスティッドロジットモデルの特徴と利用法については、Ben-Akiva and Lerman (1985)、Train (2003)等に詳しくまとめられている。また、日本でも、交通工学研究会 (1993)、土木学会 (1995)、北村・森川 (2002) といった解説書が存在している。しかし、これらの文献は費用便益分析への適用に重点を置いておらず、ロジット型のモデルを費用便益分析に用いる際の問題点が十分に明らかになっているとは言えない。本研究はこの間隙を埋める試みである。

本稿の構成は以下の通りである。2節では、ロジットモデルを費用便益分析において活用することが議論されている背景にある実務上の課題を概観する。3節では、効用最大化問題からロジットモデルを導出する方法を簡単におさらいして、需要曲線の形状や価格弾力性等のロジットモデルの特徴を検討する。4節は、ロジットモデルにおける便益評価は、OD レベルのログサム変数を用いても、経路レベルの一般均衡需要関数を用いても行うことができることを示し、台形公式方式と総交通費用方式の2つの方式との比較を行う。5節では、OD 交通量が可変のケースを扱うことができるネスティッドロジットモデルを検討する。6節は、費用便益分析の実務の視点から、本稿で得られた結論をまとめる。

### 2 交通分野の費用便益分析における実務上の課題

ロジットモデルを費用便益分析において活用することが議論されている背景には、費用便益分析の実務上の課題が顕在化していることがある。まず、これらの課題を概観しておこう。

交通分野の費用便益分析においては、まず、4段階法や場合によってはロジットモデル等の離散選択モデルを用いて需要予測が行われる。この需要予測は、投資を行う (With) ケースと行わない (Without) ケースのそれぞれについて交通需要と一般化費用<sup>1</sup>を予測するものであり、これらに基づいて、便益の評価を行う。4段階法においては、(1) 各ゾーン毎の出発トリップ数 (発生交通量) と到着トリップ数 (集中交通量) を予測し、(2) 次に、これらを出発ゾーンと到着ゾーンの OD ペア (O は Origin (起点)、D は Destination (終点) を表す) に配分して、OD 交通量を予測し、(3) さらに、それを経路別に配分し、交通ネットワーク上の各リンクに割り付ける。

需要予測においては、予測を当てることを主目的としてモデルやパラメータの選択が行われ

<sup>1</sup> 一般化費用は通常の経済学における価格に相当する。時間費用等の利用者が自分で負担する費用を含めるので一般化費用と呼ばれる。

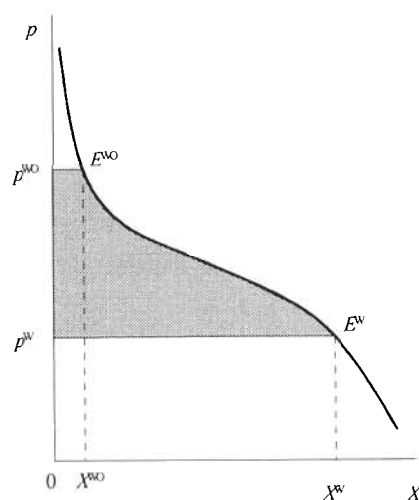
るので、費用便益分析における理論的枠組みと整合的でないことが多い。費用便益分析と整合的なモデルを用いて需要予測を行い、需要予測と便益推計を同時にできるようにする試みも行われているが、「二兎を追う者は一兎をも得ず」ということがありえる。需要予測に主眼を置いたモデルでは便益推計においてバイアスが発生する可能性があるし、逆に、便益推計における整合性を重んじると需要予測が実態と合わないものになる可能性がある。費用便益分析と整合的でありながら予測精度が高い需要予測モデルの開発を続ける必要があるのは当然であるが、現状では、需要予測に用いられているモデルを費用便益分析にそのまま用いることは必ずしも前提にできない。

便益評価の基本は、プロジェクトによる消費者余剰の変化を推計することであり、それは図1にあるような需要曲線の左側の面積を計算することに帰着する。そのために必要な情報は、With ケースと Without ケースの交通量( $X^W, X^{WO}$ )と一般化費用( $p^W, p^{WO}$ )、及び需要曲線の形状である。ここで、交通量については需要予測から得られており、それを使うことになる。したがって、主として問題になるのは、一般化費用と需要曲線の形状である。

一般化費用の推計においては、時間価値の設定が問題になる。需要予測にロジットモデル等の離散的選択モデルを用いる場合には、時間価値も同時に推定されるので、これを用いることが自然である。しかし、こうして求めた時間価値の推定値は大きくばらつくことがあるので、他の研究成果を参考にして、外側から与えることも考えられる。また、4段階法を用いて推定している場合には、時間価値の推定値は得られないので、外側から与える以外の選択肢はない。

需要曲線の形状については、直線であると仮定して台形公式を適用することが多いが、これが望ましくないケースもある。後ほど見るように、ロジットモデルの需要曲線は直線ではなく、S字型の特殊な形状をしているので、台形公式による推計値とは乖離する。また、経路間の代替性が完全であるという仮定が置かれる場合もある。この場合には、一般化費用が他の経路より高い場合には需要がゼロになり、低い場合には全OD交通量がこの経路に集中する。したがって、完全代替の仮定が成立している場合には、個別経路の需要曲線は水平になる。完全代替のケースでは、総交通費用の低下分が便益になるので、道路の費用便益分析マニュアル(国土交通省道路局、都市地域整備局(2003))で採用されているような総交通費用方式が適用

図1 便益評価の基本



可能である。

新規建設の場合には、Without ケースの一般化費用データが存在しないので問題が発生する。推定しなければならないのは需要曲線が縦軸と交わる位置であり、需要曲線の形状が分かっているならば問題はない。完全代替の仮定が近似的に成立している場合には、総交通費用の低下で計測できるが、これは個別経路の需要曲線が水平だからである。代替性が不完全な場合には、総交通費用方式での推計はバイアスを発生させるので、ロジットモデルを用いることが検討されている。しかしながら、後ほど解説するように、ロジットモデルを用いる便益推計値はパラメータの設定によって大きく変動するので、実際の適用には注意が必要である。

新規建設と同様な問題が発生するのは、容量制約が存在する場合の容量拡張投資である。たとえば、地方空港の滑走路延長投資は、大型の機材を利用可能にすることによって、容量制約を解消する効果が期待されている。こういった場合には、容量制約が存在する Without ケースにおける一般化費用が分かっているならば問題はないが、通常は分からないケースが多い<sup>2</sup>。

交通需要予測は発生集中、OD、経路という段階を追って行われ、それぞれの段階の需要量が予測される。便益評価に用いる需要曲線を考える際に、これらのどのレベルのものを用いるかという問題が生じる。実務においても、経路レベルのものを用いるケースと OD レベルのものを用いるケースとが存在する。OD レベルの需要曲線を考える際には、経路レベルの一般化費用を集計した何らかの価格インデックスを考える必要がある。以下でも解説するように、ロジットモデルにおいては、ログサム変数という簡単な形をベースにした価格インデックスを用いることができる。

以上のように、費用便益分析の実務においては、一般化費用や需要曲線の形状の設定をどうするかといった問題や、OD レベルの需要で評価するのか、あるいは経路レベルの需要で評価するのかといった問題が存在する。ロジットモデルがこれらの問題に対してどのような答えを与えるのか、あるいは与えないのかについて以下で見ていく。

### 3 ロジットモデルの構造

#### 3-1 ロジットモデルの導出

ロジットモデルは離散選択モデルの一つである。ミクロ経済学では、同質な財・サービスを考え、それをどれだけ消費するかという量の選択として個人の選択をモデルすることが多い。しかしながら、実際の選択においては、異質な財・サービスのなかから一つあるいは少数を選択するというケースが多い。交通需要においても、航空、新幹線、高速道路といった複数の交通手段（あるいは、経路）からいずれかを選択するといったことを考えるのが通常である。こういった離散的な選択を扱うのが離散選択モデルである。

以下では、2ゾーン間（OD ペア）の複数経路から1つの経路を選択する例を用いて解説する。OD 交通量が可変であるケースは後ほどネスティッドロジットモデルのところで扱うこととし、ここでは、OD ペアの交通量（OD 交通量と呼ぶ）が固定されているケースを考える。

<sup>2</sup> 容量制約が存在する場合でも、施設利用料金が需要と供給を一致させるように決定されていれば、その料金を用いて一般化費用を推計できる。ところが、実際には料金が低く抑えられていて、超過需要が発生し、割り当てが行われていることが多い。例えば、羽田空港の発着枠は、新規参入の促進等の政策目的によって割り当てられており、入札等によって発着枠の価格付けが行われているわけではない。こういった場合には、容量制約のシャドウプライスを推定する必要があるが、実務上は困難である。

OD 交通量が  $X$  であるとし、消費者の経路選択によってこれが複数経路に配分されるとする。各経路を選択したときに得られる効用は、旅行時間、費用、乗り換え回数などのサービス特性と職業、所得、性別等の個人属性に依存する。ここでは、説明の簡単化のために、個人属性の差は無視して、サービス特性だけを考える。効用を左右する様々な特性のなかには、測定可能な変数と不可能な変数がある。測定不可能な変数を誤差項として表現すると、経路  $i$  ( $i=1,2,\dots,J$ ) の効用は確定的効用部分

$$(1) \quad V_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_K x_{Ki}$$

と確率変数である誤差項部分  $\varepsilon_i$  から構成され、

$$(2) \quad U_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \varepsilon_i$$

の形になる。ここで、 $x_{ki}$  は測定可能なサービス特性  $k$ 、 $\beta_k$  はサービス特性  $k$  の価値を表す係数、 $\varepsilon_i$  は誤差項である。誤差項がガンベル分布（第 I 種極値分布とも呼ばれる）に従うと仮定するのがロジットモデルである。なお、この誤差項が正規分布に従うと仮定するのがプロビットモデルである。

サービス特性が金銭的費用  $M_i$ 、旅行時間  $T_i$ 、及び各経路のその他の特性の 3 つから構成されるとすると、経路  $i$  ( $i=1,2,\dots,J$ ) の効用を

$$(3) \quad \begin{aligned} U_i &= \beta(y - p_i) + a_i + \varepsilon_i \\ p_i &= M_i + \theta T_i \end{aligned}$$

の形で表すことができる。ここで、 $y$  は所得、 $p_i$  は一般化費用（時間費用を金銭換算して金銭的費用と合計したもの）、 $a_i$  はその他特性がもたらす効用を表す定数項（経路ダミーの係数とも解釈できる）である。係数  $\beta$  と  $\theta$  はそれぞれ所得の限界効用と時間価値であると解釈できる。実際には、所得や好みが個人によって異なるが、ここでは簡単化のためにすべての人が同質であると仮定する。この仮定の下では所得の項は無視できるので、以下では所得の項を省略する。また、経路の選択にはそれらの間の差だけが意味を持つので、経路  $J$  を基準にとって、経路  $J$  のその他特性項をゼロ ( $a_J = 0$ ) と置く。

以上をまとめると、経路  $i$  ( $i=1,2,\dots,J$ ) の効用は確定的効用部分と誤差項との和

$$(4) \quad U_i = V_i + \varepsilon_i$$

である。ここで、確定的効用部分

$$(5) \quad \begin{aligned} V_i &= -\beta p_i + a_i, \text{ with } a_J = 0 \\ p_i &= M_i + \theta T_i \end{aligned}$$

は、金銭的費用と時間費用の和である一般化費用  $p_i$  と経路毎の定数項  $a_i$  から構成される。誤差項  $\varepsilon_i$  は独立で同一のガンベル分布に従う。

各消費者は効用が最大になる経路を選択する。どの経路が効用を最大にするかは、確定的効用だけでなく、誤差項部分にも依存するので、消費者の選択は確率的にしか決まらない。経路  $i$  が選択される確率は

$$(6) \quad P_i = \text{Prob}(V_i + \varepsilon_i \geq V_j + \varepsilon_j, \forall j \neq i)$$

である。

ロジットモデルでは、誤差項  $\varepsilon_i$  が独立で同一のガンベル分布（第 I 種極値分布）に従うと仮定される。詳細については付録 1 で解説するが、ガンベル分布の一般形は、分布のバラツキを表すスケールパラメータ  $\mu$  と分布の位置を表すロケーションパラメータ  $\eta$  を用いて、2 重指数型の分布関数

$$(7) \quad F(\varepsilon) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{\varepsilon - \eta}{\mu}\right)\right\}$$

で表される。(6)式からも分かるように、消費者の選択は誤差項の差だけに依存し、誤差項の絶対水準には依存しないので、ガンベル分布の位置（平均）は問題にならない。この理由からロケーションパラメータはゼロ ( $\eta = 0$ ) と設定されることが通常である。スケールパラメータ  $\mu$  と一般化費用の係数  $\beta$  の双方を別々に推定することはできず、推定できるのはこれらの比 ( $\beta/\mu$ ) だけであるので、スケールパラメータを 1 に基準化し、 $\mu = 1$  と置くことが通常である。この場合には、一般化費用の係数が分布のバラツキを表すことに注意が必要である。

ガンベル分布(7)のもとでは、経路  $i$  の選択確率は

$$(8) \quad P_i = \frac{\exp(V_i / \mu)}{\sum_{j=1}^J \exp(V_j / \mu)}, \quad i = 1, \dots, J$$

となる。すべての消費者が同じ効用関数をもつとすると、経路  $i$  の交通需要はこの選択確率に OD ペアの交通量をかけた

$$(9) \quad x_i = \frac{\exp(V_i / \mu)}{\sum_{j=1}^J \exp(V_j / \mu)} X, \quad i = 1, \dots, J$$

となる。これがロジットモデルの需要関数を与える。

### 3-2 ロジットモデルの特徴

ロジットモデルは扱いが容易なので、実務で多用されているが、非常に限定的な仮定が置かれているので、費用便益分析に適用する際には注意が必要である。以下では、前節で導入した例を用いて、ロジットモデルの特性を概観する。

#### 需要曲線の形状

効用が(4)、(5)で表される場合には、選択確率(8)は

$$(10) \quad P_i = \frac{\exp((- \beta p_i + a_i) / \mu)}{\sum_{j=1}^J \exp((- \beta p_j + a_j) / \mu)}, \quad i = 1, \dots, J$$

となる。ここで、スケールパラメータ  $\mu$  が小さくなると、誤差項の分散が小さくなる。このパラメータは経路間の代替性の程度を決定する重要なパラメータである。 $\mu$  がゼロのケースでは、誤差項の分散がゼロになり、確定的効用部分だけで経路選択がなされる。つまり、確定的効用が最大の経路が確率 1 で選択され、他の経路の選択確率はゼロになる。これは、経路間の代替性が完全であるケースであると解釈できる。交通工学の分野では Wardrop の原則が成り立っているケースとも言われる。スケールパラメータが大きくなると、経路間の代替性が低くなる。

すでに触れたように、スケールパラメータと一般化費用の係数を別々に推定することはできない。以下ではスケールパラメータを 1 に基準化し、選択確率を

$$(11) \quad P_i = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{j=1}^J \exp(V_j)} = \frac{\exp(-\beta p_i + a_i)}{\sum_{j=1}^J \exp(-\beta p_j + a_j)}, \quad i=1, \dots, J$$

と表す。この場合の需要関数は

$$(12) \quad x_i = \frac{\exp(V_i)}{\sum_{j=1}^J \exp(V_j)} X = \frac{\exp(-\beta p_i + a_i)}{\sum_{j=1}^J \exp(-\beta p_j + a_j)} X, \quad i=1, \dots, J$$

となる。

#### 例：航空とフェリー

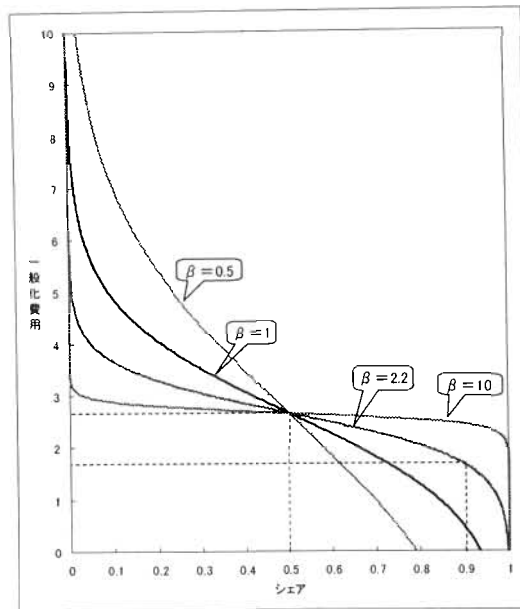
まず、経路の数が 2 つだけのケースについて、需要曲線の形状を見てみる。例として、離島へのフェリー航路と航空路線を考える。フェリーは運賃が 1 万円で 300 分かかり、航空は運賃が 1 万 5 千円で時間が 30 分かかる。合計で年間 10 万人の利用者があり、航空旅客は 9 万人で、フェリーの旅客は 1 万人である。時間価値が 1 時間あたり 3,314 円であるとすると、フェリーの一般化費用は 26,570 円であり、航空の一般化費用は 16,657 円である。

表 1 数値例：航空とフェリー

	航空	フェ リー
旅客数 (万人)	9	1
運賃 (円)	15,000	10,000
時間 (分)	30	300
時間費用 (円)	1,657	16,570
一般化費用 (円)	16,657	26,570

航空が経路 1 で、フェリーが経路 2 であるとして、まず、定数項  $a_1$  がゼロであると仮定しよう。(  $J=2$  であるので、フェリーの定数項  $a_2$  はもともとゼロであると設定されている。) 図 2 は、このケースについて、フェリーの一般化費用を固定して、航空の一般化費用だけを変化させている。縦軸に航空の一般化費用 (単位: 万円)、横軸に旅客シェアをとっているので、この図は航空の需要曲線を表していると解釈できる。この図のように、ロジットモデルの需要曲線

図2 ロジットモデルにおける需要曲線の形状



はロジスティック曲線を縦にした形をしており、価格が高い部分では下に向かって凸であるが、価格が低くなると凹になる。また、価格が上がると需要量はゼロに漸近する。

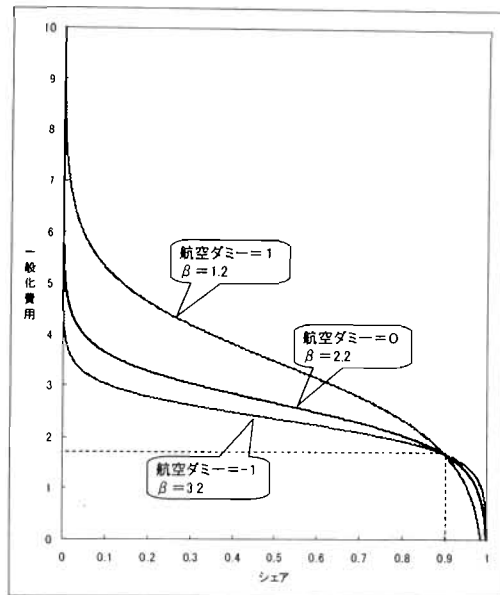
定数項がゼロであるという仮定のもとでは、航空の一般化費用がフェリーと等しい場合に、航空のシェアが丁度 50%になる。スケールパラメータを 1 に基準化しているので、一般化費用の係数  $\beta$  は誤差項のパラツキを表しており、これが大きくなるほど航空とフェリーの代替性が大きい。 $\beta$  が 0.5 と小さいときには、図の需要曲線はなめらかな右下がりの曲線であるが、 $\beta$  が大きくなるにしたがって、フェリーの一般化費用近傍で大きく需要が変化するようになる。

図2では、予想された航空の一般化費用（16,657円）のもとで、航空のシェアが9割になるのは、 $\beta$  が約 2.2 の時である。図3では、定数項を変化させて、9割のシェアをもたらす  $\beta$  の値を求めている。この図から分かるように、航空の定数項（図では航空ダミーと呼んでいる）がプラスのケースでは  $\beta$  が下がり、マイナスのケースでは上がる傾向がある。定数項がプラスのケースでは、一般化費用が同じであっても航空がフェリーより好まれるので、需要曲線が右側にシフトする傾向をもつ。したがって、 $\beta$  が小さくても9割の航空シェアが達成できることになる。

後ほど見るように、 $\beta$  の値は交通投資の便益推定値に大きな影響を与える。ロジットモデルを用いて需要予測がなされている場合には、この値の推定値も求められているので、それを使うことができる。しかし、需要予測が4段階法等の他の手法で行われている場合には、 $\beta$  の値を別途推計する必要がある。

以上の議論は経路の数が3つ以上の場合にも簡単に拡張できる。たとえば、すべての経路が同じ属性（一般化費用と定数項）をもつ場合には、各経路の選択確率が等しくなり、経路数が  $J$  の時の選択確率は  $1/J$  である。したがって、各経路の需要曲線は2経路の場合よりも左側に寄った形になる。

図3 定数項を変化させた場合の需要曲線の形状



### 価格弾力性

ロジットモデルにおける需要の価格弾力性は非常に簡単な形になる。OD 交通量  $X$  を固定すると、需要関数(12)式における経路  $i$  の需要の自己価格弾力性は、

$$(13) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i} = -\beta p_i (1 - P_i), \quad i = 1, \dots, J$$

となる。したがって、自己価格弾力性は、自己の価格 ( $p_i$ ) と他の選択肢が選ばれる確率の合計 ( $1 - P_i$ ) の積に一般化費用の係数 ( $\beta$ ) をかけたものになる。このことから、 $\beta$  が価格弾力性の値を決める重要なパラメータであることが分かる。

経路  $j$  ( $\neq i$ ) の価格 (一般化費用) が経路  $i$  の需要に及ぼす影響を測る交差弾力性は

$$(14) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i} = \beta p_j P_j, \quad i \neq j$$

となる。この交差弾力性が経路  $j$  の価格と選択確率にのみ依存し、経路  $i$  の価格や選択確率に依存しないことがロジットモデルの大きな特徴である。つまり、価格  $p_j$  が他の経路  $i$  の需要に与える影響を交差弾力性で計測すると、すべての  $i$  について同じになる。この意味で、経路間の代替関係がすべての経路について同じである。

### IIA 特性

ロジットモデルの持つ強い制約のひとつに IIA (Independence from Irrelevant Alternatives) 特性がある。IIA 特性とは、2つの選択肢の選択確率の比がそれら以外の選択肢に依存しないという性質である。このことは、



$$(15) \quad \frac{P_i}{P_j} = \exp(V_i - V_j)$$

であることから確かめられる。

IIA 特性が非現実的な結果をもたらす可能性があることは「赤バス-青バス問題」として知られている<sup>3</sup>。ここでは、より現実的な例を使って IIA 問題を考えよう。現在、ある 2 地点間の移動には、自家用車かバスを使うしかないとする。自家用車は 70%、バスは 30% のシェアを持つ。この地点間に地下鉄ができるでしょう。地下鉄開業後は、地下鉄が 40% のシェアを持つと予測されている。ロジットモデルの場合、地下鉄開業後の自家用車とバスのシェアは IIA の特徴を用いて簡単に計算できる。自家用車を添字 C、バスを添字 B であらわすと、地下鉄開業前は、

$$(16) \quad \frac{P_C}{P_B} = \frac{7}{3}$$

が成立している。IIA により、地下鉄開業後も自家用車とバスの比率は同じであるので、地下鉄開業後の自家用車のシェアは、 $60\% \times 0.7 = 42\%$ 、バスのシェアは  $60\% \times 0.3 = 18\%$  となる。したがって、地下鉄開業により、自家用車のシェアは 28%、バスのシェアは 12% 下落する。現実には、地下鉄開業によって、同じ公共交通機関であるバスの方がより大きな影響を受けると思われる。しかし、IIA を前提とする限り、シェアの大きい財（ここでは自家用車）の需要が、シェアの小さい財の需要よりも大きく低下することになる。

なお、この IIA という特徴は、すべての財で交差価格弾力性が同じであるという(14)式の結果と表裏一体の関係にある。交差価格弾力性が同じであるので、価格が変化した財以外では同じ割合で需要が変化する。自家用車とバスの合計では、地下鉄開業前に 100% のシェアがあり、これが開業後には 60% になっている。自家用車とバスは同じ割合で需要が減少するので、両方とも 40% 需要が減少することになる。地下鉄開業後のそれぞれのシェアは、 $70 \times 0.6 = 42\%$ 、 $30 \times 0.6 = 18\%$  となり、先ほどと同じ結果が得られる。

### 3-3 代表的消費者による効用最大化問題としての表現

ロジットモデルは個々の消費者の行動を確率的にモデル化し、市場需要関数(12)はそれらを足し合わせることによって得られる。この集計された需要関数は、以下のような代表的消費者の効用最大化問題の解として求めることも可能である。

<sup>3</sup> 赤バス-青バス問題については、Train (2003, p. 50)の解説がわかりやすい。そこでの解説を要約すると以下のようになる。消費者が自家用車とバスの間の選択を行っているとする。当初、バスはすべて青色に塗られており、青バスと呼ばれている。簡単化のために、これら 2 つの確定的効用は同じであるとする。そうすると、ロジットモデルにおいては、選択確率は 2 分の 1 ずつになる。次に、赤色に塗った赤バスが導入され、この赤バスは青バスと全く同じ確定的効用を与えるとする。この場合には、赤バスと青バスの選択確率は同じにならなければならない。ここで、ロジットモデルの IIA 特性は、自家用車と青バスとの間の選択確率の比が他の選択肢には影響されないことを意味している。したがって、赤バスが導入されても、自家用車と青バスの選択確率は同じでなければならない。これが可能なのは、自家用車、青バス、赤バスの選択確率が 3 分の 1 ずつであるケースだけである。単に色を塗り替えたバスを導入しただけで、自家用車の選択確率が 2 分の 1 から 3 分の 1 に下がるというのは現実的でない。

$$(17) \quad \max_{\{z, x_j\}} U = z + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^J \left[ a_j - \ln\left(\frac{x_j}{X}\right) \right] x_j$$

$$\text{s.t.} \quad Y = z + \sum_{j=1}^J p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^J x_j = X$$

ここで、 $Y$ は所得、 $z$ は交通以外の財サービスをまとめた合成消費財の消費量であり、合成消費財の価格を1と置いている。この効用最大化問題を解くと、市場需要関数(12)が得られる。つまり、(12)のようなロジットモデルの需要関数を考えることは、代表的消費者が効用最大化問題(17)を解いていると考えることと同値である。

需要関数(12)を効用関数に代入すると間接効用関数

$$(18) \quad U = Y + \frac{X}{\beta} \ln \left( \sum_{i=1}^J \exp(V_i) \right)$$

が得られる。

## 4 ロジットモデルにおける便益評価

### 4-1 ロジットモデルにおける消費者余剰：ログサム変数

ロジットモデルにおいては消費者余剰も非常に簡単な形になる。各消費者は効用を最大にする経路を選択する。この最大化された効用水準を一般化費用の係数 $\beta$ （所得の限界効用）で割れば、貨幣換算された消費者余剰になる。したがって、消費者余剰は $CS = (1/\beta) \max_j(U_j)$ となり、この期待値は、

$$(19) \quad E(CS) = \frac{1}{\beta} E[\max_j(V_j + \varepsilon_j)]$$

となる。ここで、 $\varepsilon_j$ は独立で同じガンベル分布にしたがう。これまでと同様にガンベル分布のスケールパラメータを1に基準化する。ガンベル分布のもとでは、この期待値は

$$(20) \quad E(CS) = \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j) \right) + \gamma \right\}$$

となる<sup>4</sup>。ここで、 $\gamma \approx 0.577$ はオイラー定数である。ガンベル分布の期待値はゼロでないので、オイラー定数の項が出てくるが、便益評価においては代替案の差をとるので、この項は消えてしまう。

プロジェクトを行うケース（With ケース、添え字 W で表す）と行わないケース（Without ケース、添え字 WO で表す）の間の期待消費者余剰の差は

<sup>4</sup> ロジットモデルにおける消費者余剰については、Williams (1977)と Small and Rosen (1981)を参照されたい。

$$(21) \quad \Delta E(CS) = E(CS^w) - E(CS^{w0}) \\ = \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^w) \right) - \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^{w0}) \right) \right\}$$

となる。ここで、

$$(22) \quad S = \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j) \right)$$

はログサム変数と呼ばれている。ログサム変数は選択確率の分母の部分に等しく、このことがロジットモデルにおける期待効用の計算を非常に簡単にしている。なお、(22)式を所得の限界効用  $\beta$  で割って、貨幣単位にしたものをログサム変数と呼ぶこともある。

市場全体の期待消費者余剰の変化は個人のそれを集計することによって求められる。すべての個人が同質であり、消費者の数が  $X$  で固定されている場合<sup>5</sup>には、

$$(23) \quad \Delta B = \Delta E(CS)X = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^w) \right) - \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^{w0}) \right) \right\}$$

となる。したがって、ロジットモデルにおいては、ログサム変数を用いた非常にシンプルな形の便益評価ができる。

ログサム変数を所得の限界効用  $\beta$  で割って、それにマイナスをつけたもの

$$(24) \quad c = -\frac{1}{\beta} \ln \left( \sum \exp(V_j) \right)$$

は期待不効用を貨幣換算したものであり、交通の期待最小費用を表していると解釈できる。これは合成費用 (Composite Cost) とも呼ばれる。一般化費用  $p_i$  が経路  $i$  の価格であると解釈できるのに対して、この合成費用はそれらの経路を束ねた OD ペアの価格であると考えることができる。合成費用を用いると、便益を

$$(25) \quad \Delta B = (c^{w0} - c^w)X = \int_w^{w0} Xdc$$

と書くことができる。OD レベルの交通量  $X$  が固定されているので、便益は合成費用の低下分  $(c^{w0} - c^w)$  に交通量をかけたものに過ぎないが、これは、合成費用を OD レベルの価格として、OD レベルの需要曲線を用いて消費者余剰を計算したものと解釈できる。5 節で見るように、ネスティッドロジットモデルを用いると、この性質を OD レベルの交通量が可変なケースに拡張することができる。

期待消費者余剰の変化は、ロジットモデルに同値な代表的消費者の効用関数を用いて計算することもできる。(18)式の間接効用関数を用いると、消費者余剰の変化は

<sup>5</sup> 各消費者は必ず1つの選択肢を選ぶので、消費者数が一定である場合には、消費者数と OD 交通量は等しい。

$$(26) \quad \Delta B = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^w) \right) - \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^{w0}) \right) \right\}$$

となり、上式と一致する。

#### 4-2 需要曲線の左側の面積を用いた表現

ミクロ経済学の初歩で学ぶように、消費者余剰の変化を需要曲線の左側の面積で表すことができる。ロジットモデルでは複数経路に対する需要を同時に考えているので、複数市場に拡張する必要がある。これは、部分均衡の需要曲線ではなく、一般均衡需要曲線を用いれば可能であることが知られている<sup>6</sup>。

ログサム変数を一般化費用で微分すると、

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(-\beta p_j + a_j) \right) \right\} = -\beta \frac{\exp(-\beta p_i + a_i)}{\sum_{j=1}^J \exp(-\beta p_j + a_j)} = -\beta P_i$$

となり、選択確率に所得の限界効用をかけて、それにマイナスをつけたものに等しくなる。この性質を用いると、一般化費用が  $p_j^{w0}$  から  $p_j^w$  に変化するときの消費者余剰の変化は

$$(28) \quad \Delta B = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^w) \right) - \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j^{w0}) \right) \right\} = \sum_{j=1}^J \left( \int_{p_j^w}^{p_j^{w0}} x_j dp_j \right)$$

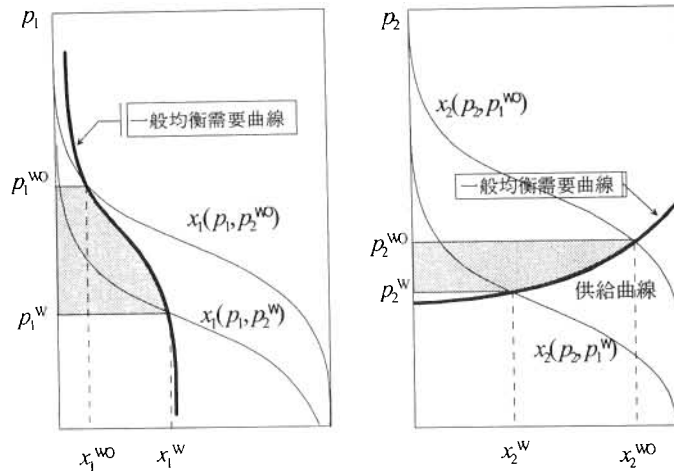
となることが分かる<sup>7</sup>。ここで、右端の積分は、各経路における（一般均衡）需要曲線の左側の面積を表している。したがって、OD レベルのログサム変数で便益を推計する代わりに、経路レベルの一般均衡需要曲線を用いて便益を推計することができる。

以下の図は、経路が2つだけのケースについて経路1の価格（一般化費用）を Without ケースの  $p_1^{w0}$  から With ケースの  $p_1^w$  まで動かしたときの一般均衡需要曲線を描いている。経路2では供給曲線が固定されているとしている。経路1の価格が下がると、経路2の需要曲線は下方にシフトし、経路2の価格が低下する。これは経路1にはね返ってきて、経路1の部分均衡需要曲線が下方にシフトする。この動きを辿ったものが一般均衡需要曲線である。経路2では供給曲線が一般均衡需要曲線と一致する。こうして描かれた一般均衡需要曲線の左側の面積（図の灰色部分）の和がログサム変数を用いて計算した便益推計値と一致する。

<sup>6</sup> 金本 (1996)、金本・蓮池・藤原 (2006) 第2章を参照されたい。

<sup>7</sup> 詳細については、Kidokoro (2006)を参照されたい。

図4 一般均衡需要曲線



上で見たように、OD レベルのログサム変数による便益推計は、合成費用を OD レベルの価格として、OD レベルの需要曲線を用いて消費者余剰を計算したものと同値である。したがって、ログサム変数を用いれば、OD レベルでの評価を理論的に整合的な形で行うことができる。しかしながら、単純な加重平均のような他の価格指数については、一般にこのような結果が得られていないことに注意が必要である<sup>8</sup>。たとえば、1999 年版鉄道マニュアル（運輸政策研究機構(1999b)）では、OD 間の一般化費用の算定方式として、

- 方法 1：最も一般化費用の低い交通機関あるいは経路の所要時間や運賃等を用いて、当該ゾーン間の一般化費用を算定する方法
- 方法 2：各交通機関あるいは経路の所要時間や運賃等を、それぞれその需要に応じて加重平均を行うことにより、当該ゾーン間の一般化費用を算定する方法
- 方法 3：需要予測モデルに非集計ロジットモデルを使用している場合、ログサム変数を用いて、当該ゾーン間の一般化費用を算定する方法

の3つがあるとし、方法2か方法3を採用することが望ましいとしている<sup>9</sup>。しかしながら、方法2の交通機関や経路の需要に応じて加重平均をとる方式は、①すべての経路が利用されており、すべての経路の一般化費用が等しいか、②効用関数がレオンティエフ型の場合には理論的に整合的であるが、それ以外の場合には一般的な整合性はない。①はもともと加重平均を考える意味がないケースである。②のレオンティエフ型のケースは各経路の需要シェアが一定で変化しないというきわめて特殊なケースであり、現実的でない。

また、「方法3は、需要予測において非集計ロジットモデルを用いたときのみを使用できる方法であることに留意すべきである」という記述があるが、需要曲線を近似する方法の一つとして、ロジットモデルを使うということも考えられる。需要曲線の形状によっては、通常の台形公式による線形近似よりも、ロジスティック曲線による近似の方が当てはまりがよいことも十分にありうるからである。ただし、ロジットモデルで近似する場合には、所得の限界効用や経

<sup>8</sup> 城所(2005)を参照。

<sup>9</sup> 1999年版空港マニュアル（運輸政策研究機構(1999a)）にも同様な記述が見られる。その後の改訂版鉄道マニュアル（国土交通省(20005)）では、この記述は姿を消しており、方法3のログサム変数を用いる方法を推奨するとしている。

路ダミー等のパラメータを適切に設定しておく必要がある。以下の航空とフェリーの例からも明らかなように、それができていない場合には大きなバイアスが発生する可能性がある。

#### 4-3 バリエーションの評価

ロジットモデルにおける消費者余剰は選択肢が増えると必ず増加するという望ましい性質を持っている。選択範囲が広がれば、そのことによって効用が上がることは当然であろう。すべての経路の確定的効用が等しくて、 $V_j = V$  と置ける場合には、ログサム変数は

$$(29) \quad \ln \left( \sum_{j=1}^J \exp(V_j) \right) = \ln(J \exp(V)) = V + \ln J$$

となり、選択肢の数の増加関数になっている。

#### 4-4 例：航空とフェリー

前節で見た航空とフェリーの例を考えてみよう。定数項部分  $a_1$  はゼロであるとし、航空のシェアが9割になる  $\beta = 2.2165$  を仮定する。

空港新設の場合には、空港ができる前の Without の一般化費用をどう設定するかが難しい。まず、空港がすでに存在していて、空港施設の改善によって航空の一般化費用が下がったケースを考える。下がった後 (With) の一般化費用を前節で仮定した 16,657 円とし、下がる前 (Without) の一般化費用が 40,000 円であったとする。後者の場合の航空旅客数は約 4,800 人である。これらは以下の図に表されている。  $p_1^{w0}$  は空港施設改善前の航空の一般化費用であり、  $p_1^w$  は改善後の一般化費用である。  $p_2$  はフェリーの一般化費用である。

以下では、(1) ログサム方式による便益推計手法、(2) 需要曲線が直線であると仮定して台形公式で推定する手法、(3) 総交通費用の変化で推計する総交通費用方式の3つを比較する。これらの3つは、ログサム方式はロジットモデル、台形公式は直線の需要曲線、総交通費用方式は完全代替ケースといった、それぞれ特殊な需要構造のもとでは正しい推計値を与える。どの推計値が正しい値に近いかは、真の需要構造がどのケースに近いかに依存する。以下では、ロジットモデルによる需要曲線を用いて3方式の比較を行うが、これはロジットモデルが現実に近いということではない。

(28)式で見たように、第一のログサム方式は経路需要曲線の左側の面積に等しくなる。我々の例では、フェリーを使うものと航空を使うものの二つの経路があり、これら2つの市場における需要曲線の左側の面積を足し合わせなければならない。しかしながら、フェリーの一般化費用は変化しないので、フェリー市場の側ではこの面積はゼロになる<sup>10</sup>。航空市場では、図5で灰色に塗られている部分の面積になり、これを計算すると、表2にあるように、便益推計値は101,641万円になる。

需要曲線が直線であると仮定して台形公式を適用する第二のケースでは、  $p_1^{w0}$   $E_1^{w0}$   $E_1^w$   $p_1^w$  の4点を結んだ台形の面積が便益の推計値になる。この場合には、台形公式の方がログサム方式より推計値が若干大きくなり、110,703万円である。

<sup>10</sup> これが成り立つためには、フェリーの市場において価格の歪みがない、すなわち、価格（一般化費用）が社会的限界費用に等しいという仮定が必要である。

図5 各種便益推計手法の比較

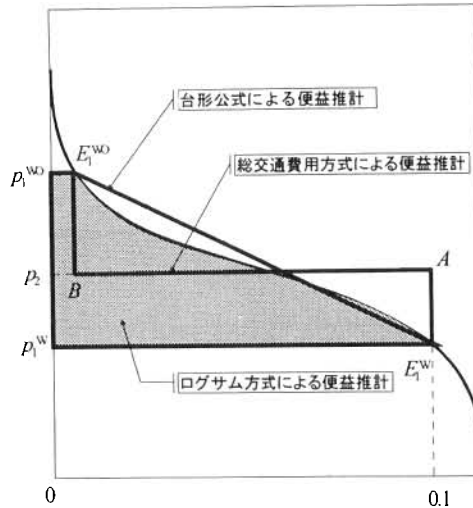


表2 便益推計方法の比較：Without 航空運賃が4万円のケース

便益推計値 (万円)			ログサム方式との比率	
ログサム方式	総交通費用方式	台形公式	総交通費用	台形公式
101,641	95,729	110,703	0.94	1.09

第三の総交通費用で推定する手法は道路や空港の費用便益分析マニュアルで採用されている方式である。路線間で完全代替の仮定が満たされていれば正しい推計値を与えるが、代替性が不完全な場合にはバイアスが発生する。Without のケースでは、約 4,800 人が一般化費用 4 万円の航空を利用し、残りの 95,200 人が一般化費用 26,570 円のフェリーを利用していた。With のケースでは、9 万人が一般化費用 16,657 円の航空を利用する。したがって、総交通費用は、 $4,800 \text{ 人} \times (40,000 \text{ 円} - 16,657 \text{ 円}) + 85,200 \text{ 人} \times (26,570 \text{ 円} - 16,657 \text{ 円}) = 95,729 \text{ 万円}$  だけ減少する。図では、 $p_1^{WO}$   $E_1^{WO}$   $B$   $A$   $E_1^W$   $p_1^W$  の 6 点を直線で結んだ部分の面積がこれに相当する。

Without の一般化費用が変化すると、これら 3 つの推計値の相対的關係は大きく変化する。表 3 に示しているように、Without の一般化費用が低いケースでは、総交通費用方式がログサム方式よりも便益が高くなり、台形公式は逆に低くなる傾向がある。Without の一般化費用が上がってくると、この傾向は逆転し、総交通費用方式の便益が低くなり、台形公式が高くなる。これは、一般化費用が高くなるとロジットモデルの需要曲線が漸近的に縦軸に近づくからである。

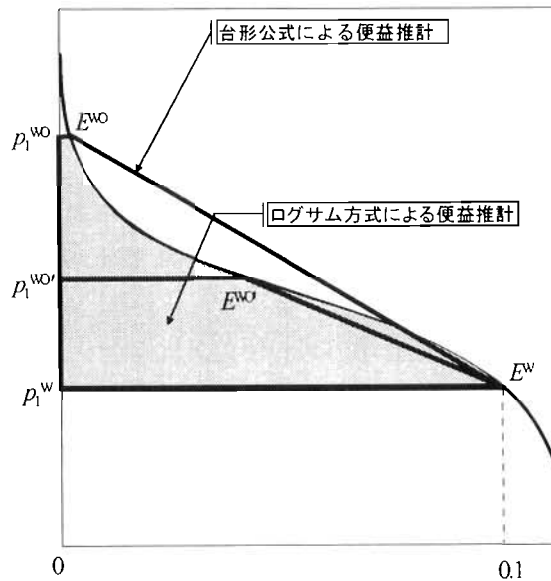
三つの方式の差についてももう少し詳細に見てみよう。まず、ログサム方式と台形公式を比較する。表 3 の結果は、航空の一般化費用が低いときには、台形公式とログサム方式の差は小さいが、一般化価格が高くなるにしたがって、両者が乖離することを示している。図 6 はこの傾向を図示している。一般化費用が  $p_1^{WO}$  で高いときには、台形公式とログサム方式の差が大きく、 $p_1^{WO}$  と低いときにはこれらの差はほとんどない。これは、台形方式が With と Without の 2 点だけをとった線形近似であることによっている。一般的に、線形近似は価格変化が小さいときは誤差が小さいが、需要関数が線型でない限り、大きくなるにつれて誤差が拡大していく。特

に、ロジットの需要曲線のように漸近的に縦軸に接近する場合には、この傾向が著しい。ただし、これは線形近似に一般的にあてはまる問題であり、With と Without の点だけでなく、中間点を取って台形公式を適用することによって誤差を減らすことができる。実際、イギリスの便益評価マニュアルである TUBA (Department of Transport (2004)) ではこのような中間点を用いて誤差を縮小させる方法を採用している。

表 3 便益推計方法の比較

Without 航空運賃	便益			ログサム方式との 比率	
	ログサム 方式	総交通費 用方式	台形公式	総交通 費用	台形公 式
2	28,730	35,937	28,599	1.25	1.00
2.657	72,611	89,217	69,391	1.23	0.96
3	86,577	100,145	81,298	1.16	0.94
3.5	97,408	100,489	94,807	1.03	0.97
4	101,641	95,729	110,703	0.94	1.09
5	103,634	90,511	150,964	0.87	1.46
10	103,883	89,217	375,044	0.86	3.61
100	103,883	89,217	4,425,043	0.86	42.60
10000	103,883	89,217	449,925,043	0.86	4331.06

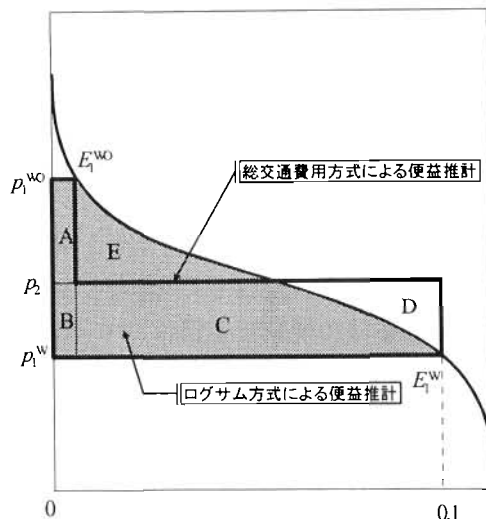
図 6 ログサム方式と台形公式の比較





次に、ログサム方式と総交通費用方式を比較する。図 7 で、 $p_1^{WO}$  から  $p_1^W$  に価格が低下した場合の便益は、ログサム方式では、 $A+B+C+E$  であるが、総交通費用方式では、 $A+B+C+D$  である。E の面積と D の面積の大小によって、どちらの方式の推計値が大きくなるかが決まる。 $p_1^{WO}$  が高いほど、E の面積が大きいため、ログサム方式の便益の方が大きくなりやすい。表 1 の例で、Without の航空運賃が高いほど、ログサム方式の便益が高くなっているのはこの理由による。

図 7 ログサム方式と総交通費用方式の比較



空港新設のケースは Without の一般化費用が無限大になったケースと同値である。したがって、図 7 における A と B の領域がなくなり、図 8 のようになる。ロジットモデルの需要曲線は一般化費用が高くなると縦軸に漸近的に近づき、需要量がゼロにきわめて近くなる。したがって、ログサム方式の便益は有限の値に収束する。収束のスピードは速く、表 3 の例では一般化費用が 10 万円を超えるとログサム方式の便益はほぼ一定になる。これに対して、Without の点と With の点を直線で結ぶ台形方式では、Without の点が際限なく上昇するので、推計値が無限大に発散する。総交通費用方式による便益推計値は有限である。我々の例では E の部分の面積が D の部分より大きいので、ログサム方式の推計値より小さくなる。

空港マニュアルでは、空港新設によってフェリーから航空に移った旅客については一般化費用がフェリーの  $p_2$  から航空の  $p_1^W$  に下がり、フェリーを利用し続ける旅客の一般化費用は  $p_2$  で変わらないと想定して、そのことによる総交通費用の減少を便益推定値としている。これは図 8 における総交通費用方式に相当する。

以上の結果は、パラメータの値に依存しており、必ずしも一般的に当てはまるものではない。特に、ログサム方式による便益推計値は  $\beta$  の値に大きく依存している。定数項部分  $a_1$  が変化すると  $\beta$  の値が変わり、ロジットモデルによる便益推計値も大きく変化する。図 9 は、航空の定数項部分が 1、0、-1 の 3 ケースを描いている。これらの 3 ケースで、ログサム方式による便益推計値は大きく異なる。空港新設の便益推計値を総交通方式によるものと比較すると、表 4 のようになる。定数項が 1 と 0 のケースでは、総交通費用方式の方が便益が低く出るが、-1 のケースでは 25%程度高くなっている。

図 8 空港新設のケース

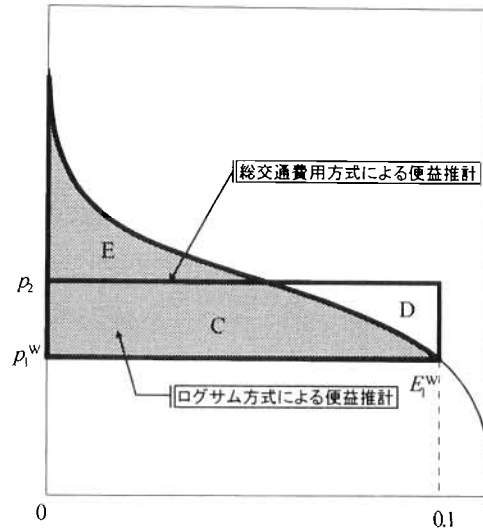


図 9 定数項の便益推定値に対する影響

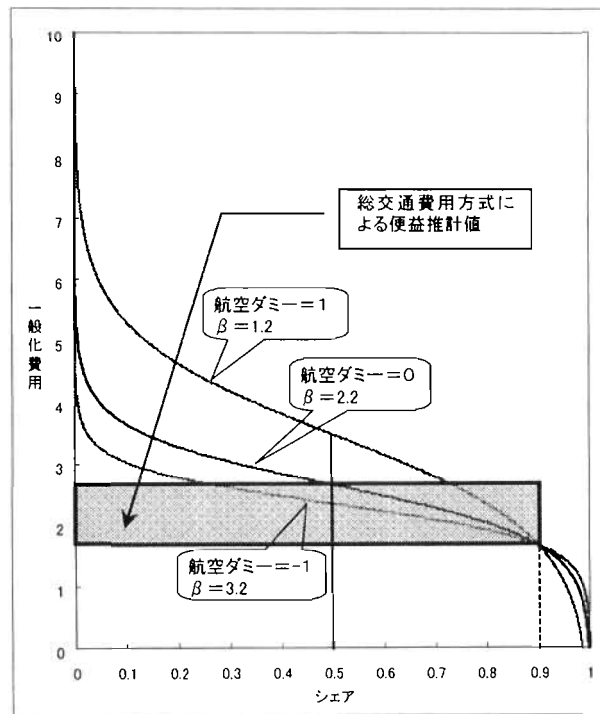


表 4 便益推計方法の比較：定数項の影響

$a_1$	$\beta$	ログサム方式 (a)	総交通費用方式 (b)	(b)/(a)
1	1.2	190,653	89,217	0.47
0	2.2	103,883	89,217	0.86
-1	3.2	71,392	89,217	1.25

ロジットモデルを代表的消費者の効用最大化問題として(17)のように定式化すると、空港新設のケースでの総交通費用方式とログサム方式の関係を、別の観点から見ることができる。(17)を用いると、効用の変化を

$$U^W - U^{WO} = - \left( \sum_{j=1}^J p_j^W x_j^W - \sum_{j=1}^J p_j^{WO} x_j^{WO} \right) + \frac{1}{\beta} \left( \sum_{j=1}^J a_j x_j^W - \sum_{j=1}^J a_j x_j^{WO} \right) + \frac{1}{\beta} \left[ \sum_{j=1}^J \left( -x_j^W \ln(x_j^W / X) \right) - \sum_{j=1}^J \left( -x_j^{WO} \ln(x_j^{WO} / X) \right) \right]$$

の形に3つに分解することができる。ここで、右辺の第1項が総交通費用の変化である。ログサム方式の便益評価が総交通費用方式を上回るかどうかは、第2項と第3項に依存する。

第2項は各選択肢固有の特性がもたらす効用の変化である<sup>11</sup>。すべての選択肢の定数項がゼロであるときには、この項はゼロになる。ここで用いている例ではフェリーの定数項をゼロとしており、空港が新設されるケースでは  $x_1^{WO} = 0$  であるので、この項は  $(a_1 / \beta) x_1^W$  となる。したがって、定数項（航空ダミー）が正であれば正、負であれば負になる。

第3項はバラエティーの変化がもたらす効用の変化であると解釈できる。空港が存在しない Without では、 $x_1 = 0$ 、 $x_2 = X$  であるので、

$$\sum_{j=1}^J \left( -x_j^{WO} \ln(x_j^{WO} / X) \right) = -0 \ln(0) - X \ln(1) = 0$$

である。 $0 < x_j < X$  の場合には必ず  $-x_j \ln(x_j / X) > 0$  になるので、

$$\sum_{j=1}^J \left( -x_j^W \ln(x_j^W / X) \right) = -x_1^W \ln(x_1^W / X) - x_2^W \ln(x_2^W / X) > 0$$

である。したがって、第3項は正である。

上記の結果から、空港が新設される場合には、定数項（航空ダミー）が非負であれば、ログサム方式の便益評価は総交通費用方式の便益評価を必ず上回ることがわかる。一般的には、各選択肢固有の特性がもたらす効用の変化とバラエティーの変化がもたらす効用の変化の大小関係によって、どちらの方式が大きな便益をもたらすかが決まる。表4で定数項が-1の場合は、総交通費用方式の方が高い便益をもたらしているが、これは、マイナスの航空ダミーがもたらす効用の減少分が、バラエティーの増加がもたらす効用の増加分よりも大きいことによる。

## 5 ネスティッドロジットモデル

ここまでは、OD交通量が固定のケースを扱ってきた。費用便益分析の実務においてはOD交通量を所与とすることが多いので、このケースは実務上の重要性を持つ。しかしながら、一

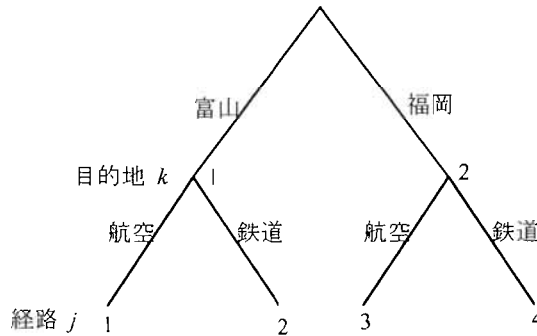
<sup>11</sup> Anderson, et al. (1992)では、 $\sum_{j=1}^J a_j x_j$  を composite characteristic of the variant bundle（変数の合成特性）と呼んでいる。

般には、OD 交通量も可変であるので、OD 需要が変化するケースも考えておく必要がある。その際に頻繁に用いられるのが、ネスティッドロジットモデルである。以下では、ネスティッドロジットモデルを用いた場合の便益評価方法について解説する。

### 5-1 ネスティッドロジットモデルの導出

ロジットモデルを入れ子型にしたものがネスティッドロジットモデルである。消費者は目的地  $k$  ( $= 1, \dots, K$ ) をまず選択し、目的地を選択したらその目的地に行く経路を選択するとする。この選択の構造は図 10 のようなツリー状になっている。目的地と経路の組み合わせから構成される選択枝を  $j$  ( $= 1, \dots, J$ ) で表し、これらの選択枝が目的地毎にグループ分けされると考える。これらの選択枝は目的地毎にグループ分けされる。目的地  $k$  における経路の集合を  $B_k$  とし、ネスト  $k$  と呼ぶ。

図 10 目的地と経路の選択例



ネスティッドロジットモデルでは、誤差項  $\varepsilon_j$  の分布関数が

$$(30) \quad F(\varepsilon_j) = \exp \left( - \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(-\varepsilon_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right)$$

の形をしている。ロジットモデルにおいては、誤差項  $\varepsilon_j$  はすべて独立であるが、ネスティッドロジットモデルにおいてはネスト内の誤差項は相関しており、異なったネストの誤差項は独立である。パラメータ  $\lambda_k$  は、ネスト  $k$  の内部における誤差項の独立性の程度を表している。 $\lambda_k$  が大きいほど、独立性が高く、相関が低い。 $\lambda_k = 1$  の時には完全に独立であり、相関がない。すべての  $\lambda_k$  が 1 の時には、ロジットモデルになる。

ネスティッドロジットモデルにおける選択確率は

$$(31) \quad P_i = \frac{\exp(V_i / \lambda_k) \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k - 1}}{\sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k}}$$

となる。この選択確率は、以下のように、目的地  $k$  を選択する確率  $P_{B_k}$  とその目的地を選択する

という条件の下で経路  $j$  を選択する確率  $P_{i|B_k}$  の2つの積として表現することができる。

$$(32) \quad P_i = P_{i|B_k} P_{B_k}$$

$$(33) \quad P_{B_k} = \frac{\exp(S_k)}{\sum_{l=1}^K (\exp(S_l))}$$

$$(34) \quad P_{i|B_k} = \frac{\exp(V_i / \lambda_k)}{\sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k)}$$

ここで、

$$(35) \quad S_k = \lambda_k \ln \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k)$$

はネスト（目的地） $k$  におけるログサム変数であり、合成効用（inclusive value）と呼ばれることもある<sup>12</sup>。これはネスト  $k$  内の経路から得られる効用の最大値の期待値を表している。これを所得の限界効用  $\beta$  で割って貨幣単位にして、それにマイナスをつけた合成費用

$$(36) \quad c_k = -\frac{\lambda_k}{\beta} \ln \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k)$$

をネスト  $k$  の価格であると考えることができる。

効用関数が(4)、(5)式で表される例では、選択確率は

$$(37) \quad P_i = \frac{\exp((- \beta p_i + a_i) / \lambda_k)}{\sum_{j \in B_k} \exp((- \beta p_j + a_j) / \lambda_k)} \cdot \frac{\exp(S_k)}{\sum_{l=1}^K (\exp(S_l))}$$

$$(38) \quad S_k = \lambda_k \ln \sum_{j \in B_k} \exp((- \beta p_j + a_j) / \lambda_k)$$

となる。したがって、総交通量を  $X$  とすると、経路  $i$  の交通需要は

$$(39) \quad x_i = \frac{\exp((- \beta p_i + a_i) / \lambda_k)}{\sum_{j \in B_k} \exp((- \beta p_j + a_j) / \lambda_k)} \cdot \frac{\exp(S_k)}{\sum_{l=1}^K (\exp(S_l))} X$$

となる。この需要関数の各種価格弾力性は付録3で導出している。

## 5-2 代表的消費者による効用最大化問題としての表現

ロジットモデルと同様にネスティッドロジットモデルも代表的消費者による効用最大化問題として定式化することができる。Verboven (1996)が導いている結果から、以下の効用最大化問題が選択確率(37)をもたらすことが分かる。

<sup>12</sup>  $\lambda_k$  をかけない  $\ln \sum_{j \in B_k} \exp(Y_j / \lambda_k)$  を合成効用と呼ぶ場合もある。

$$(40) \quad \max_{\{z, x_j\}} U = z + \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{j \in B_k} \left[ a_j - \ln \left( \frac{x_j}{\sum_{j \in B_k} x_j} \right)^{\lambda_k} \left( \frac{\sum_{j \in B_k} x_j}{X} \right) \right] x_j \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad Y = z + \sum_{j=1}^J p_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^J x_j = X$$

ここで、 $Y$ は所得、 $z$ は交通以外の財サービスをまとめた合成消費財の消費量である。この効用最大化問題を解くと、市場需要関数(39)が得られる。

需要関数(39)を効用関数に代入すると間接効用関数

$$(41) \quad U = Y + \frac{X}{\beta} \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp \left( \lambda_k \ln \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k) \right) \right) \right)$$

が得られる。

### 5-3 ネスティッドロジットモデルにおける便益評価

ネスティッドロジットモデルの期待消費者余剰は

$$(42) \quad E(CS) = \frac{1}{\beta} E[\max_j (V_j + \varepsilon_j)]$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) + \gamma \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(S_k) \right) + \gamma \right\}$$

となる。したがって、ネスティッドロジットモデルにおける消費者余剰は各ネストのログサム変数  $S_k$  を入れ子にしたログサム変数

$$(43) \quad S = \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(S_k) \right)$$

を用いて表すことができる。一般化費用が  $p_j^{WO}$  から  $p_j^W$  に変化して、確定効用が  $V_j^{WO}$  から  $V_j^W$  になることによる変化は

$$(44) \quad \Delta E(CS) = \frac{1}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j^W / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) - \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j^{WO} / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) \right\}$$

である。

すべての目的地へのトリップを合計した総交通需要が固定されていて  $X$  であるとする、消費者余剰の合計の変化は、経路毎に分解して表現すると

$$(45) \quad \Delta B = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j^W / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) - \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j^{WO} / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) \right\}$$

であり、目的地 (OD) 単位で集計したログサム変数を用いると

$$(46) \quad \Delta B = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(S_k^W) \right) - \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(S_k^{WO}) \right) \right\}$$

となる。後者は、(36)で定義した合成費用  $c_k$  を用いて、

$$(47) \quad \Delta B = \frac{X}{\beta} \left\{ \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(-\beta c_k^W) \right) - \ln \left( \sum_{k=1}^K \exp(-\beta c_k^{WO}) \right) \right\}$$

と表すこともできる。

また、(43)式を一般化費用に関して微分して、それを  $p_j^{WO}$  から  $p_j^W$  まで積分することによって(45)式を書き換えると

$$(48) \quad \Delta B = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in B_k} \left( \int_{p_j^W}^{p_j^{WO}} x_j dp_j \right)$$

が得られる。したがって、経路毎の (一般均衡) 需要曲線の左側の面積を用いて便益評価を行うことができる。同様に、(47)式について  $c_k^{WO}$  から  $c_k^W$  までの微分と積分を行うと、

$$(49) \quad \Delta B = \sum_{k=1}^K \left( \int_{c_k^W}^{c_k^{WO}} X_k dc_k \right)$$

が得られる。ここで、

$$(50) \quad X_k = \sum_{j \in B_k} x_j$$

は目的地  $k$  への交通需要の合計である。したがって、合成費用を価格と考えて OD 需要曲線を描くことによって消費者余剰を計算しても、各経路の需要曲線から消費者余剰を計算しても同じ結果が得られる<sup>13</sup>。

## 6 まとめ

本稿では、ロジットモデルとネスティッドロジットモデルをミクロ経済学との整合性と費用便益分析の実務に対する含意を考慮しながら解説した。以下では、費用便益分析の実務の視点から、本稿での結論をまとめておく。実務においては、OD レベルの交通需要とその下の経路 (あるいは交通手段) レベルの交通需要が主として議論になるので、ここでは、これらの2段

<sup>13</sup> より一般的な分析については、円山 (2005) を参照。

階に即して解説する。

ロジットモデルにおいては、ログサム変数を用いた便益評価を OD レベルで行うことができる。ログサム変数にマイナスをつけた合成費用を価格とみなして、OD レベルの需要曲線を描くことができ、これを用いて消費者余剰を計算すればよい。OD 交通量が固定のケースでは、経路レベルの需要をロジットモデルで表現できればこれが成り立つ。OD 交通量が可変の場合には、ネスティッドロジットモデルを用いることによって、これが可能になる。

当然のことながら、経路レベルの需要を用いて便益を計測することもできる。ロジットモデルであろうとなかろうと、一般均衡需要曲線を用いれば、経路需要曲線の左側の面積で消費者余剰の変化が計測できる。ロジットモデルでは、需要曲線がロジスティック曲線を縦にした形をしており、下に向かって凸の部分と凹の部分とがある。便益推計値は下に向かって凸の部分では小さくなり、凹の部分では大きくなるので、需要曲線のパラメータの推定値によって便益推計値が大きく変化する。With ケースと Without ケースの双方について一般化費用と需要量の良好な推計値が得られている場合でも、これら 2 点を結ぶ需要曲線の形状を誤って推定した場合には、便益推計値が大きなバイアスをもつことになる。ロジットモデルにおいて需要曲線の形状を決定するパラメータは、通常、所得の限界効用（一般化費用の係数）と経路ダミーの 2 つであり、これらのパラメータをなるべく正確に推定する必要がある。

OD レベルで便益評価を行う場合にも全く同じ問題が存在するが、ログサム変数の中に隠れてしまっていて目に見える形にならないので特に注意が必要である。ログサム変数から経路需要曲線を導いて、その位置と形状が適切に推定されているかどうかを検証することが望ましい。

なお、OD レベルでの便益評価を行う場合に、ログサム変数ではなく、需要に応じた一般化費用の加重平均を用いることが行われているが、これが理論的整合性をもつのは、すべての経路が利用されており、すべての経路の一般化費用が等しいか、効用関数がレオンティエフ型の場合である。前者のケースは加重平均する意味がなく、後者のケースは交通需要の場合には現実的でない。

また、需要予測においてロジットモデルを用いているケースに限りログサム変数を用いることができることを示唆している費用便益分析マニュアルも存在する。しかし、需要曲線を近似する方法の一つとして、ロジットモデルを使うということも考えられる。需要曲線の形状によっては、通常の台形公式による線形近似よりも、ロジスティック曲線による近似の方が当てはまりがよいことも十分にありうるからである。ただし、その場合には、上述のように、所得の限界効用や経路ダミー等のパラメータを適切に設定する必要がある。

新設の場合や容量制約がある場合には、Without ケースにおける一般化費用が存在しないことが多い。その場合には、OD レベルでの評価が用いられることが多く、ロジットモデルが特に有用だとされている。しかしながら、これは問題を顕在化させていないだけであり、本質的な解決策にはなっていない。OD レベルのログサム変数には必ずそれに対応する経路レベルの需要曲線が対応する。この需要曲線が実態に合っていないければ、便益推計値が大きなバイアスをもつことになる。この場合も、パラメータを適切に設定する必要があるのは同じである。

一般化費用の推計値が存在する場合でも、これが適切である保証は必ずしもない。一般化費用を計算するためには、時間費用が必要であるが、時間費用の推定は容易でない。需要予測をロジットモデルで行う場合には、時間費用も同時に推定されているので、これを用いるのが当然である。これと違う時間費用を用いて、新たに一般化費用を推計することは、需要予測と整



合しない便益評価を行うことになる。ただし、需要予測モデルにおける時間価値の推定値は大きくばらつくことがあるので、そういったケースの処理については更なる検討が必要である。需要予測が4段階法等でなされている場合には、時間価値を外から与える必要がある。その際に、時間価値の設定値が適切でなければ便益推計値もバイアスをもってしまうので、時間価値をなるべく正確に推定する努力をしなければならない。

また、実際には、時間価値は一つではなく、個人や旅行目的によって異なっている。単純なロジットモデルは時間価値のバラツキを無視している。ロジットモデルを拡張してランダム係数ロジットモデルを用いれば、時間価値の確率分布を推定することが可能である<sup>14</sup>。しかしながら、現状では実務で用いることができるだけの研究の蓄積が存在しないので、この点の検討は今後の課題である。

## 付録1 ガンベル分布の性質と選択確率の導出

誤差項  $\varepsilon$  がガンベル分布  $(\eta, 1/\mu)$  に従うとき、その分布関数は

$$(A1) \quad F(\varepsilon) = \exp\left\{-\exp\left(-\frac{\varepsilon-\eta}{\mu}\right)\right\}$$

であり、密度関数は

$$(A2) \quad f(\varepsilon) = \mu \exp\left(-\frac{\varepsilon-\eta}{\mu}\right) \exp\left\{-\exp\left(-\frac{\varepsilon-\eta}{\mu}\right)\right\}$$

である。ここで、 $\eta$  はロケーションパラメーター、 $\mu$  はスケールパラメーターと呼ばれる。ガンベル分布は以下の性質を持つ。(Ben-Akiva and Lerman (1985))

(G1) 最頻値 (モード) は  $\eta$ 。

(G2) 平均は  $\eta + \mu\gamma$  ( $\gamma \approx 0.577$  はオイラー定数)。

(G3) 分散は  $\mu^2\pi^2/6$ 。

(G4)  $\varepsilon$  がガンベル分布  $(\eta, 1/\mu)$  に従うとき、線形変換した  $k\varepsilon + l$  ( $k > 0$ ) は、ガンベル分布  $(k\eta + l, 1/k\mu)$  に従う。

(G5)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  がそれぞれ  $(\eta_1, 1/\mu), (\eta_2, 1/\mu)$  のガンベル分布に従うとき、これらの差  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  はロジスティック分布  $F(\tilde{\varepsilon}) = 1/(1 + \exp[-(\tilde{\varepsilon} - (\eta_1 - \eta_2))/\mu])$  に従う。

(G6)  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j$  がそれぞれ独立に  $(\eta_1, 1/\mu), \dots, (\eta_j, 1/\mu)$  のガンベル分布に従うとき、これらの最大値  $\max(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$  は  $(\mu \ln \sum_{j=1}^j \exp(\eta_j/\mu), 1/\mu)$  のガンベル分布に従う。

次に、本文(8)式の選択確率を導く。選択確率の定義式(6)は

<sup>14</sup> 時間価値の分布を推定しようとする試みの一つについては、金本・武藤(2005)を参照されたい。

$$(A3) \quad P_i = \text{Prob}(V_i + \varepsilon_i \geq V_j + \varepsilon_j \quad \forall j \neq i) \\ = \text{Prob}(V_i + \varepsilon_i \geq \max_{j \neq i} (V_j + \varepsilon_j))$$

と書き換えることができる。ここで、 $\varepsilon_j$  は独立で同一のガンベル分布  $(\eta, 1/\mu)$  に従う。  
 $\tilde{U} = \max_{j \neq i} (V_j + \varepsilon_j)$  と定義すると、選択確率は

$$(A4) \quad P_i = \text{Prob}(V_i + \varepsilon_i \geq \tilde{U}) \\ = \text{Prob}(\tilde{U} - (V_i + \varepsilon_i) \leq 0)$$

となる。ここで、(G6)から  $\tilde{U}$  は  $(\mu \ln \sum_{j \neq i} \exp(V_j/\mu), 1/\mu)$  のガンベル分布に従い、 $V_i + \varepsilon_i$  は  $(V_i + \eta, 1/\mu)$  のガンベル分布に従うので、(G5)を使うと、

$$(A5) \quad P_i = \frac{1}{1 + \exp\left(\left(\mu \ln \sum_{j \neq i} \exp(V_j/\mu) - V_i\right)/\mu\right)} \\ = \frac{\exp(V_i/\mu)}{\exp(V_i/\mu) + \sum_{j \neq i} \exp(V_j/\mu)} \\ = \frac{\exp(V_i/\mu)}{\sum_{j=1}^J \exp(V_j/\mu)}$$

となる。これがロジットモデルにおける経路  $j$  の選択確率(8)式である。

## 付録2 ネスティッドロジットモデルの期待消費者余剰の導出

ここでは、ネスティッドロジットモデルを含んだより一般的なモデルである GEV モデルの期待消費者余剰を McFadden (1978, p.82)と同様の方法で導出し、その特殊ケースとして、ネスティッドロジットモデルの期待消費者余剰を求める。

GEV モデルは、以下の4条件を満たす関数  $G(z_1, \dots, z_J)$  を用いて定義される。

(GEV-1)  $G(z_1, \dots, z_J)$  は非負の関数である。

(GEV-2)  $G(z_1, \dots, z_J)$  は  $n$  次同次関数である<sup>15</sup>。

(GEV-3)  $\lim_{z_j \rightarrow \infty} G(z_1, \dots, z_J) = \infty$

(GEV-4)  $(1, \dots, J)$  を並び替えて  $(j_1, \dots, j_l)$  とすると、 $\partial^l G / \partial z_{j_1} \dots \partial z_{j_l}$  は  $l$  が奇数のときに非負、 $l$  が偶数のときに非正である。

これらの4条件を満たす  $G$  を用いて、累積分布関数を

$$(A6) \quad F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = \exp[-G(\exp(-\varepsilon_1), \dots, \exp(-\varepsilon_J))]$$

と書くことができるものを GEV モデルと呼ぶ。

GEV モデルにおいては、最大効用の期待値は以下のように求められる。まず、路線  $i$  が最大

<sup>15</sup> McFadden (1978)は  $G(z_1, \dots, z_J)$  が1次同次関数であるとしているが、Ben-Akiva and Francois (1983)は同次関数であればよく、1次同次である必要はないことを示している。ここでも(GEV-2)のように、 $G(z_1, \dots, z_J)$  は単に同次関数であるという仮定だけを置く。

効用を与える（つまり、 $\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_j + \varepsilon_j) = v_i + \varepsilon_i$ である）とし、この事象が起きる確率を求める。この事象が起きるのは、 $\varepsilon_j \leq -v_j + v_i + \varepsilon_i$ がすべての  $j \neq i$  について満たされるときである。ここで、分布関数の  $\varepsilon_j$  に関する偏微分を

$$(A 7) \quad f_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = \frac{\partial F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J)}{\partial \varepsilon_j}$$

と定義すると、 $f_j(-v_1 + v_i + y_i, \dots, -v_i + v_i + y_i, \dots, -v_j + v_i + y_j)$  は、任意の固定した  $y_i$  に対して、 $\varepsilon_j \leq -v_j + v_i + y_i$  がすべての  $j \neq i$  について成立する確率密度を表す。これを  $y_i$  について積分すると

$$(A 8) \quad \text{Prob}(\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_j + \varepsilon_j) = v_i + \varepsilon_i) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(-v_1 + v_i + y_i, \dots, -v_i + v_i + y_i, \dots, -v_j + v_i + y_j) dy_i$$

となり、これが路線  $i$  の選択確率を与える。他の選択肢  $j$  が最大効用を与える確率も同様に求めることができる。その結果、GEV モデルの最大効用の期待値は、

$$(A 9) \quad E[\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_j + \varepsilon_j)] = \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{\infty} [(v_j + y_j) f_j(-v_1 + v_j + y_j, \dots, -v_j + v_j + y_j)] dy_j$$

のように表現できる。ここで、(A 6)と(A 7)から、

$$(A 10) \quad f_j(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_J) = \exp(-G) \left[ \frac{\partial G}{\partial z_j} \right] \exp(-\varepsilon_j)$$

であるので、

$$(A 11) \quad f_j(-v_1 + v_j + y_j, \dots, -v_j + v_j + y_j) \\ = \exp(-G(\exp(v_1 - v_j - y_j), \dots, \exp(v_j - v_j - y_j))) \\ \times \left[ \frac{\partial G(\exp(v_1 - v_j - y_j), \dots, \exp(v_j - v_j - y_j))}{\partial z_j} \right] \exp(-y_j)$$

が成立する。 $G(z_1, \dots, z_J)$  が同次関数なので、右辺の  $G$  および  $\partial G / \partial z_j$  の中の  $-v_j - y_j$  をくくり出すことができる。

$G$  が  $n$  次同次関数であり、 $\partial G / \partial z_j$  が  $n-1$  次同次関数であることを用いると、

$$(A 12) \quad f_j(-v_1 + v_j + y_j, \dots, -v_j + v_j + y_j) \\ = \exp \left[ - \{ \exp(-v_j - y_j) \}^n G(\exp(v_1), \dots, \exp(v_j)) \right] \\ \times \{ \exp(-v_j - y_j) \}^{n-1} \left[ \frac{\partial G(\exp(v_1), \dots, \exp(v_j))}{\partial z_j} \right] \exp(-y_j)$$

となる。

ここで、 $w_j = v_j + y_j$ 、 $A = G(\exp(v_1), \dots, \exp(v_j))$  とおくと、

$$\begin{aligned}
(A 13) \quad E[\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_J + \varepsilon_J)] &= \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{\infty} [(v_j + y_j) f_j(-v_1 + v_j + y_j, \dots, -v_J + v_j + y_j)] dy_j \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{\infty} [w_j \exp[-\{\exp(-w_j)\}^n A] \{\exp(-w_j)\}^{n-1} (\partial G / \partial z_j) \exp(-y_j)] \frac{dy_j}{dw_j} dw_j \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{\infty} [w_j \exp[-A \exp(-w_j n)] \{\exp(-w_j)\}^{n-1} (\partial G / \partial z_j) \exp(v_j - w_j)] dw_j \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{\infty} [w_j \exp[-A \exp(-w_j n)] \exp(-w_j n) (\partial G / \partial z_j) \exp(v_j)] dw_j
\end{aligned}$$

と変形できる。

以下のような分布関数  $H(w_j)$  を定義する。

$$(A 14) \quad H(w_j) = \exp[-A \exp(-w_j n)]$$

この分布関数は

$$(A 15) \quad H(w_j) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{w_j - \ln A/n}{1/n}\right)\right]$$

と書き換えることができるので、ガンベル分布  $(\ln A/n, 1/n)$  である。この分布の密度関数  $h(w_j)$  は

$$\begin{aligned}
(A 16) \quad h(w_j) &= dH(w_j) / dw_j \\
&= \exp[-A \exp(-w_j n)] (-A) \exp(-w_j n) (-n) \\
&= \exp[-A \exp(-w_j n)] \exp(-w_j n) n A
\end{aligned}$$

である。ガンベル分布の性質 (G2) から、平均は  $(\ln A + \gamma)/n$  であるので、

$$(A 17) \quad \int_{w_j=-\infty}^{\infty} w_j h(w_j) dw_j = \frac{1}{n} (\ln A + \gamma)$$

が成り立つ。(A 16)、(A 17)を用いて(A 13)を整理すると、

$$\begin{aligned}
(A 18) \quad E[\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_J + \varepsilon_J)] &= \sum_{j=1}^J \int_{w_j=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{w_j h(w_j)}{nA} (\partial G / \partial z_j) \exp(v_j) \right] dw_j \\
&= \sum_{j=1}^J \frac{(\partial G / \partial z_j) \exp(v_j)}{nA} \int_{w_j=-\infty}^{\infty} w_j h(w_j) dw_j \\
&= \frac{1}{n} (\ln A + \gamma) \sum_{j=1}^J \frac{(\partial G / \partial z_j) \exp(v_j)}{nA} \\
&= \frac{1}{n} (\ln A + \gamma) \\
&= \frac{1}{n} (\ln G(\exp(v_1), \dots, \exp(v_J)) + \gamma)
\end{aligned}$$

となり、GEV モデルの期待最大効用を導出できる。3 行目から 4 行目の変形では、 $G(\exp(v_1), \dots, \exp(v_J))$  が  $n$  次同次関数であり、 $z_j = \exp(v_j)$  より、 $\sum_{j=1}^J (\partial G / \partial z_j) \exp(v_j) = nG = nA$  となることを用いている。

(30)から、GEV モデルの累積分布関数において、

$$(A 19) \quad G(\exp(-\varepsilon_1), \dots, \exp(-\varepsilon_J)) = \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(-\varepsilon_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k}$$

とおいたものがネスティッドロジットモデルである。この関数は 1 次同次であるので、 $n=1$  であり、ネスティッドロジットモデルの期待最大効用は

$$(A 20) \quad E[\max(v_1 + \varepsilon_1, \dots, v_J + \varepsilon_J)] = \ln \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{j \in B_k} \exp(V_j / \lambda_k) \right)^{\lambda_k} \right) + \gamma$$

となる。この期待最大効用を一般化費用の係数  $\beta$  で割れば、(42)式の期待消費者余剰が得られる。

### 付録3 ネスティッドロジットモデルにおける価格弾力性

ここでは、ネスティッドロジットモデルにおける価格弾力性を導出する。(39)式の需要関数のもとでは、経路  $i$  の交通需要の自己価格弾力性は

$$(A 21) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i} = -\frac{\beta p_i}{\lambda_k} \left[ 1 - \{ \lambda_k P_i + (1 - \lambda_k) P_{i|B_k} \} \right], \quad i = 1, \dots, J$$

となる。ロジットモデルの場合には、自己価格弾力性は、自己の価格 ( $p_i$ )、選択確率 ( $P_i$ )、一般化費用の係数 ( $\beta$ ) の 3 つをかけたものだけに依存していたが、ネスティッドロジットモデルの場合には、さらにパラメータ  $\lambda_k$  と条件付選択確率  $P_{i|B_k}$  にも依存する。ネスト化されていない選択肢に関しては、 $\lambda_k = 1$  なので、ロジットモデルの自己価格弾力性に等しい。

他経路  $j$  ( $\neq i$ ) の価格 (一般化費用) が経路  $i$  の需要に及ぼす影響を測る交差弾力性は

$$(A 22) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i} = \frac{\beta p_j}{\lambda_k} \left[ \lambda_k P_j + (1 - \lambda_k) P_{j|B_k} \right], \quad i \neq j$$

となる。ロジットモデルの場合と異なり、交差弾力性は、経路  $j$  の価格と選択確率だけでなく、パラメータ  $\lambda_k$ 、条件付選択確率  $P_{j|B_k}$  にも依存する。自己価格弾力性と同様に、ネスト化されていない選択肢に関しては、 $\lambda_k = 1$  なので、ロジットモデルの交差弾力性に等しい。また、経路  $j$  と同一のネストにある経路  $i$  に関しては、すべての  $i$  に対して交差弾力性が等しくなる。ロジットモデルの場合には、価格  $p_j$  に関する交差弾力性がすべての経路  $i$  について同じであったが、

ネスティッドロジットモデルの場合には、この性質は同一ネストの経路に対してのみ成立する。

ネスティッドロジットモデルで、交差弾力性が同一ネストの経路に対してのみ同じであるという特徴は、同一ネスト内では IIA であるが、異なったネスト間では IIA ではないことを意味する。経路  $i, j$  がそれぞれネスト  $B_{k_l}, B_{k_m}$  に属するとすると、

$$(A 23) \quad \frac{P_i}{P_j} = \frac{\exp(V_i / \lambda_{k_l}) \left( \sum_{h \in B_{k_l}} \exp(V_h / \lambda_{k_l}) \right)^{\lambda_k - 1}}{\exp(V_j / \lambda_{k_m}) \left( \sum_{h \in B_{k_m}} \exp(V_h / \lambda_{k_m}) \right)^{\lambda_k - 1}}$$

が成立する。したがって、2 つの選択枝の選択確率の比は、これらの選択枝だけでなく、これらが属するネスト内の他の選択枝にも依存する。もし、2 つの選択枝が同一ネストに属する場合には、 $k_l = k_m = k$  なので、

$$(A 24) \quad \frac{P_i}{P_j} = \exp\left(\frac{V_i - V_j}{\lambda_k}\right)$$

となり、IIA 特性を持つが、それ以外の場合は、IIA 特性が成立しない。

## 参考文献

- Ben-Akiva, M. and B. Francois, "Mu-homogeneous generalized extreme value model," *Working Paper, Department of Civil Engineering, MIT*, (1983).
- Ben-Akiva, M. and S. R. Lerman, *Discrete Choice Analysis*, MIT Press, (1985).
- Kidokoro, Y., Benefit Estimation of Transport Projects - A Representative Consumer Approach -, *Transportation Research B 40*, 521-542, (2006).
- McFadden, D., "Modelling the Choice of Residential Location," in: A. Karlqvist, L. Lundqvist, and J. W. Weibull, eds., *Spatial Interaction Theory and Residential Location* (North-Holland, Amsterdam), 75-96, (1978).
- Small, K. A. and H. S. Rosen, "Applied Welfare Economics with Discrete Choice Models," *Econometrica* 105-129, (1981).
- Train, K., E., *Discrete Choice Methods with Simulations*, Cambridge University Press, (2003).  
Department for Transport, *TUBA Guidance*, Department for Transport, UK,  
[http://www.dft.gov.uk/stellent/groups/dft\\_econappr/documents/page/dft\\_econappr\\_507975.pdf](http://www.dft.gov.uk/stellent/groups/dft_econappr/documents/page/dft_econappr_507975.pdf)  
よりダウンロード可能 (2004).
- Verboven, F., "The Nested logit Model and Representative Consumer Theory," *Economics Letters* 50, 57-63, (1996).
- Williams, H.C.W.L., "On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures

- of User Benefit,” *Environment and Planning A*, pp. 285-344, (1977).
- 運輸政策研究機構『空港整備事業の費用対効果分析マニュアル 1999』(財)運輸政策研究機構、(1999a).
- 運輸政策研究機構『鉄道プロジェクトの費用対効果分析マニュアル 1999』(財)運輸政策研究機構、(1999b).
- 金本良嗣・武藤祥郎「アクアライン ETC 社会実験による需要関数の推定」『環境外部性、混雑外部性、事故外部性に同時に対応する道路料金・道路財源政策の研究』第3章、日交研シリーズ A-390、日本交通政策研究会、37-49 頁、(2005).
- 北村隆一・森川高行(編著)『交通行動の分析とモデリング』技報堂出版、(2002).
- 城所幸弘「交通投資の費用便益分析」『フィナンシャル・レビュー』77号(2005年第3号)、120-148 頁、(2005).
- 交通工学研究会『やさしい非集計分析』丸善、(1993).
- 国土交通省道路局、都市・地域整備局『費用便益分析マニュアル』2003年8月、(2003).
- 国土交通省『鉄道プロジェクトの評価手法マニュアル 2005』国土交通省鉄道局、(2005).
- 国土交通省『空港整備事業の費用対効果分析マニュアル Ver.3』国土交通省航空局、(2004).
- 土木学会『非集計行動モデルの理論と実際』丸善、(1995).
- 円山琢也「交通需要のレベル別便益指標の一致性」Discussion Paper No.97, Department of Urban Engineering, University of Tokyo, (2005).